COLEGIO BAUTISTA TEMUCO

## CAPÍTULO 13

# FUNCIÓN CUADRÁTICA

***"Vamos... solo 100 metros más"***

*"Estaba en Northshore Park en Woodlands, Texas, tomando fotografías de pájaros y vi a este pato real acercándose para aterrizar. ¡Tomé esta foto y me sorprendió ver su boca abierta y en esta cómica posición de vuelo!"*

– FOTÓGRAFÍA: GARY READORE –

FUENTE: THE COMEDY WILDLIFE PHOTO

MORALEJA

# CAPÍTULO 13



*"El éxito consiste en ir de fracaso en fracaso sin perder el entusiasmo"*

– WINSTON CHURCHILL –

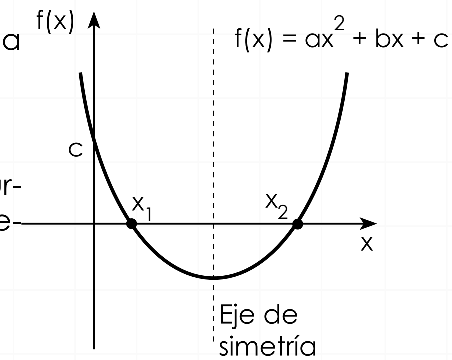
POLÍTICO Y ESTADISTA BRITÁNICO

# 1. FUNCIÓN CUADRÁTICA

Sea a, b, c $\in \mathbb{R}$ y a $\neq$ 0. Se denomina función cuadrática, a toda función de la forma:

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

La representación gráfica de una función cuadrática es una curva que se llama parábola y estudiaremos las siguientes características:




## a. Concavidad

La forma de definir el tipo de concavidad, que corresponde a la forma en cómo se produce su apertura (hacia arriba o hacia abajo), tiene que ver directamente con el valor del coeficiente "a" de $x^2$. De acuerdo al valor que tome dicho coeficiente a, se tendrá alguno de los siguientes escenarios:

- Si $a > 0$ , entonces la parábola se abre hacia arriba (cóncava hacia arriba).
- Si $a < 0$ , entonces la parábola se abre hacia abajo (cóncava hacia abajo).

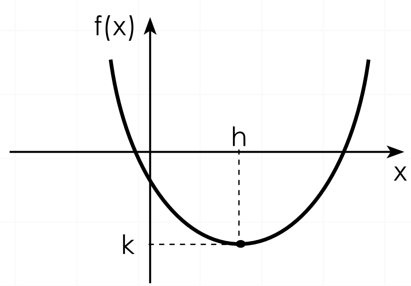
## b. Dominio y Recorrido

El dominio máximo de una función cuadrática definida desde los números reales, es el propio conjunto $\mathbb{R}$; mientras que su recorrido dependerá de si la parábola abre hacia arriba (cóncava hacia arriba), en cuyo caso tendrá un mínimo valor f(h) = k y por ende $Rec(f) = [k, +\infty[$, o si la parábola abre hacia abajo (cóncava hacia abajo), en cuyo caso tendrá un máximo valor f(h) = k y por tanto $Rec(f) = ]-\infty, k]$.

El siguiente esquema resume lo anterior.

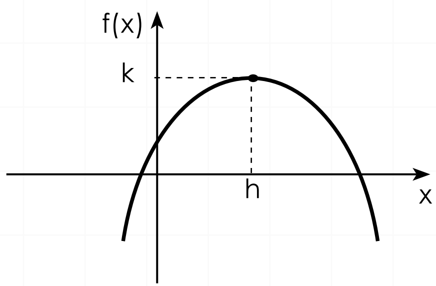
Si es cóncava hacia arriba, entonces

$$Rec(f) = [k, +\infty[$$




Si es cóncava hacia abajo, entonces

$$Rec(f) = ]-\infty, k]$$

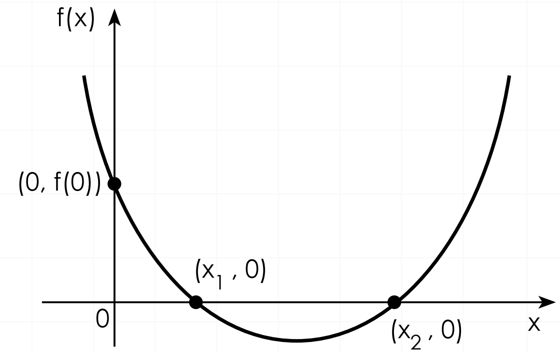


## c. Intersección con los ejes

### i. Intersección con el eje de las ordenadas.

La parábola **siempre intersecta al eje de las ordenadas** (eje y) en un único punto, y sus coordenadas son (0 , c). Esto porque, como vemos en el gráfico, su intersección con el eje y debe ser en un punto cuya abscisa es 0 y por tanto, un punto cuya ordenada está dada por f(0).

Como $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, el punto (0, f(0)) también puede ser considerado indistintamente como (0 , c).



### ii. Intersección con el eje de las abscisas.

La parábola, en caso de intersectar al eje de las abscisas (eje x), lo hará en a lo más 2 ocasiones y estas estarán directamente relacionadas con los valores de x que hagan que $f(x) = 0$. Es decir, debemos buscar valores de x tales que $ax^2 + bx + c = 0$, que es lo mismo que resolver la ecuación general de segundo grado.

Para resolver una ecuación de segundo grado o cuadrática, es decir para determinar las soluciones (o raíces), podemos seguir alguno de los siguientes procedimientos: **factorizar**, utilizando la **fórmula general**, entre otros.

<u>Método Factorización</u>

Se debe factorizar la expresión como el producto de dos binomios multiplicados eventualmente por el coeficiente de $x^2$. Así se tendrá que, si nuestra ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, la escribimos en la forma, $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$, sumado a que la única forma de que un producto de 0 como resultado, es que alguno de los factores sea igual a 0, esto nos obliga a que: o bien $a = 0$ (que no puede ser, pues dejaría de ser cuadrática la ecuación), o bien $x - x_1 = 0$ (de donde obtendremos nuestra primera solución), o bien, $x - x_2 = 0$ (de donde obtendremos nuestra segunda solución).

Ejemplos:

- Resolver: $x^2 - 5x = 0$

  $x(x - 5) = 0$

  $x = 0$ ó $(x - 5) = 0$

  $x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 5$

- Resolver: $x^2 - 4x - 12 = 0$

  $(x + 2)(x - 6) = 0$

  $(x + 2) = 0$ ó $(x - 6) = 0$

  $x_1 = -2 \; ; \; x_2 = 6$

- Resolver: $2x^2 + 7x + 3 = 0$

  $(2x + 1)(x + 3) = 0$

  $(2x + 1) = 0$ ó $(x + 3) = 0$

  $x_1 = -\frac{1}{2} \; ; \; x_2 = -3$

MORALEJA

## Método Fórmula general

Este método requiere simplemente que se reemplacen los valores de a, b y c en la fórmula para hallar la solución.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se recomienda utilizar solo cuando no es posible factorizar o completar el cuadrado.

Ejemplo:

Resolver: $2x^2 + 7x + 3 = 0$

$a = 2$ , $b = 7$ , $c = 3$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$x = \frac{-7 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{-7-5}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

$$x_2 = \frac{-7+5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

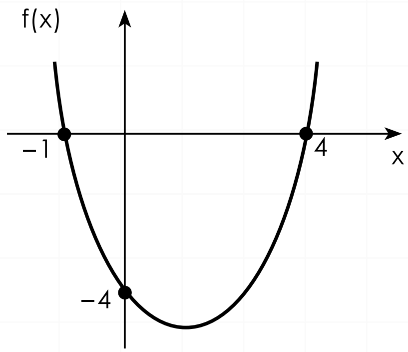
Si $x_1$ y $x_2$ son las soluciones de la ecuación, tenemos que las intersecciones con el eje x son $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

Ejemplo:

Determine los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función $f(x) = x^2 - 3x - 4$

La intersección más simple de calcular es la que se produce con el eje y, pues basta determinar el valor del coeficiente constante c, que en este caso es $-4$, y se tiene que el punto de intersección está dado por $(0, -4)$.

Para determinar los cortes (si es que los hay) con el eje x, debemos resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 3x - 4 = 0$ y como sus soluciones son 2, y sus valores son $-1$ y 4, entonces hay 2 puntos de intersección con el eje x, y están dados por $(-1, 0)$ y $(4, 0)$.



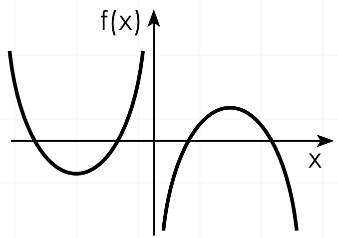
### iii. Cantidad de intersecciones con el eje x.

La gráfica de una función cuadrática no siempre intersecta al eje x, pues la parábola puede cortar en 1 punto al eje x; en 2 puntos o simplemente no tener puntos de intersección.

¿De qué depende esto? Dependerá de la cantidad de soluciones reales que tenga la ecuación $ax^2+bx+c=0$; es decir, depende del discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$), pues la cantidad de puntos de intersección es igual a la cantidad soluciones reales que la ecuación tenga.

La información se resume como sigue:

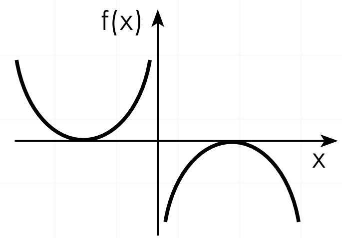
Si $\Delta > 0$




La ecuación tendrá 2 soluciones

La parábola intersecta en **2 puntos** al eje x

Si $\Delta = 0$

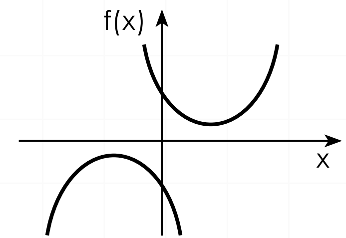



La ecuación tendrá 1 solución

La parábola intersecta en **1 punto** al eje x.

(parábola tangente al eje x)

Si $\Delta < 0$




La ecuación no tiene soluciones reales

La parábola **NO intersecta** al eje x

1. El conjunto solución (o raíces) de la ecuación $x^2 + 1 = x + 1$ es:
   *HABILIDAD: RESOLVER PROBLEMAS. (ADAPTACIÓN DEMRE 2010)*

   A) $\{0\}$
   B) $\{1\}$
   C) $\{0, 1\}$
   D) $\{0, -1\}$

2. Las soluciones de la ecuación $3(x-2)^2 = 7$ están representadas en:
*HABILIDAD: RESOLVER PROBLEMAS. (ADAPTACIÓN DEMRE 2015)*

A) $2 \pm \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

B) $-2 \pm \sqrt{\dfrac{7}{3}}$

C) $2 \pm \sqrt{\dfrac{7}{3}}$

D) $\dfrac{2 \pm \sqrt{13}}{3}$

3. Considera la función f, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. ¿Cuál es el valor de $\frac{f(-2)}{3}$?

*HABILIDAD: RESOLVER PROBLEMAS. (ADAPTACIÓN DEMRE 2022)*

A) $-1$

B) $\frac{13}{3}$

C) 7

D) 13

4. Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$ y con dominio el conjunto de los números reales. Si la gráfica de f no intersecta al eje x, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?
*HABILIDAD: REPRESENTAR. (ADAPTACIÓN DEMRE 2019)*

A) $a > 0$

B) $b > 0$

C) $b^2 - 4ac < 0$

D) La recta de ecuación $y = c$ es tangente a la gráfica de f.

5. Sea f una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = kx^2 + (k + 1)x + k + 2$, con k un número real distinto de cero. ¿Cuál de las siguientes relaciones debe cumplir el número k para que la gráfica de f intersecte al eje x en un solo punto?

*HABILIDAD: MODELAR. (ADAPTACIÓN DEMRE 2017)*

A) $\dfrac{-(k+1)+\sqrt{(k+1)^2-4k(k+2)}}{2k} = 0$

B) $3k^2 + 6k - 1 = 0$

C) $3k^2 + 6k - 1 > 0$

D) $k = -1$

6. Sean las funciones f y g, ambas con dominio el conjunto de los números reales, definidas por: $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = (x-3)^2$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

*HABILIDAD: ARGUMENTAR. (ADAPTACIÓN DEMRE 2018)*

A ) Las gráficas de f y g se intersectan en el punto $(1, 3)$.

B ) Si $x = 5$, entonces $f(x) - g(x) = 24$.

C ) Las pre–imágenes del 7 según la función f son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.

D ) La imagen de $-3$ según la función g es 0.

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera, con respecto a la función f definida por $f(x) = x^2 - 8$, para $x > \sqrt{8}$?

*HABILIDAD: ARGUMENTAR. (ADAPTACIÓN DEMRE 2019)*

A) Modela el área de un rectángulo de lados $(x - 8)$ cm y $(x + 8)$ cm.

B) Modela el área de un cuadrado de lado $(x - \sqrt{8})$ cm.

C) Modela el área de un triángulo de base $(x - \sqrt{8})$ cm y altura $(x + \sqrt{8})$ cm.

D) Modela el área que queda de restar el área de un cuadrado de lado $\sqrt{8}$ cm al área de un cuadrado mayor de lado x cm.

8. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $(ax)^2 + a = 0$, en x, con a un número real negativo distinto de $-1$?

*HABILIDAD: RESOLVER PROBLEMAS. (ADAPTACIÓN DEMRE 2019)*

A) $1$ y $-1$

B) $\frac{1}{\sqrt{-a}}$ y $\frac{-1}{\sqrt{-a}}$

C) $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$

D) $\sqrt{-a}$ y $-\sqrt{-a}$

## d. Eje de simetría y vértice

Dada una función de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y sean $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ sus intersecciones con el eje x.

El **eje de simetría** de la parábola, es una recta paralela al eje y, que se escribe de la forma x = h. Esta divide a la parábola en dos partes tales que una es reflejo de la otra, con respecto a dicha recta. Para determinar el valor de h podemos hacerlo de alguna de estas dos maneras:

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{ó} \quad h = \frac{-b}{2a}$$

El **vértice de la parábola** es el punto de intersección de ésta con su eje de simetría y es el punto más alto o más bajo de la parábola, dependiendo de su concavidad.

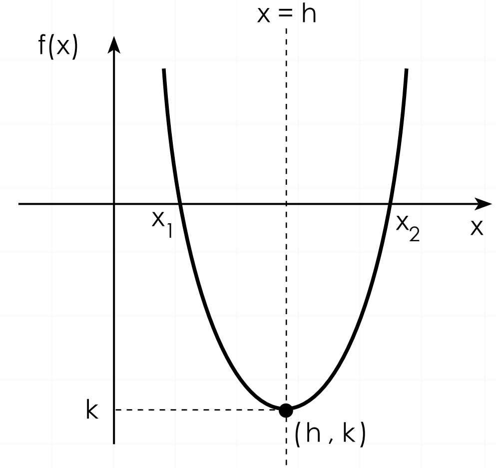
El vértice se puede determinar de tres maneras:

- Luego de obtener el valor de h, lo reemplazamos en la x de la función: $V = (h, f(h))$
- Reemplazo de fórmula:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

- Se determina visualmente si la expresión está escrita en forma canónica:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \rightarrow V = (h, k)$$




Ejemplo:

Si tenemos la función cuadrática $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$, su vértice es:

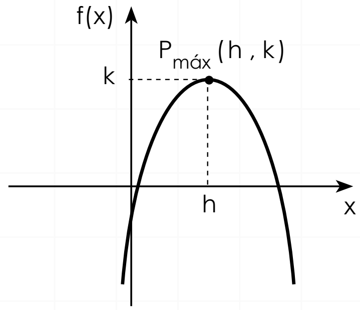
Usando fórmula,

$$V = \left(\frac{-5}{2 \cdot 3}, \frac{4 \cdot 3 \cdot (-7) - (-5)^2}{4 \cdot 3}\right)$$

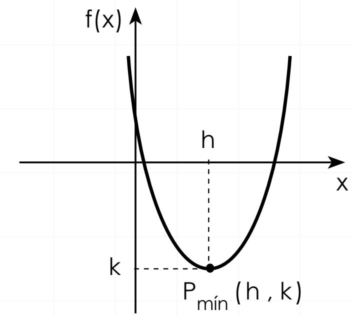
$$V = \left(\frac{-5}{6}, \frac{-109}{12}\right)$$

## e. Máximo y mínimo

Si **$a < 0$**, la función alcanza un valor máximo $(k)$, cuando la variable $x$ toma el valor de $h$.




Si **$a > 0$,** la función alcanza un valor mínimo $(k)$, cuando la variable $x$ toma el valor de $h$.

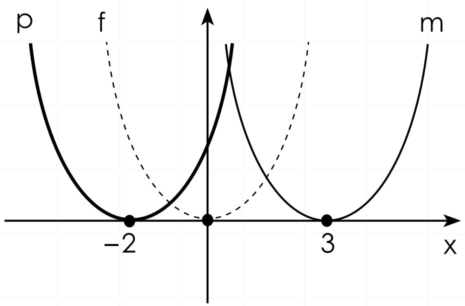


MORALEJA

## f. Desplazamientos y reflexión vertical

### i. Traslación horizontal de la función $f(x) = ax^2$

¿Cómo es la parábola de la función $m(x) = (x-3)^2$ y de la función $p(x) = (x+2)^2$, en comparación con la parábola de la función $f(x) = x^2$? Veamos la figura:




Podemos notar que la única diferencia geométrica entre la gráfica de la función m y la función p, con respecto al gráfico de la función f es, que hubo una traslación en 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia la izquierda respecto a la curva de la función f.

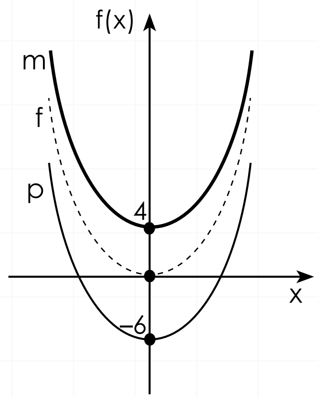
Por lo tanto, si la función está escrita de la forma $\mathbf{g(x) = a \cdot (x - h)^2}$, la función $f(x) = ax^2$ sufre un desplazamiento horizontal con la magnitud de acuerdo al valor de h.

- Si $h > 0$, se desplaza h unidades hacia la derecha.
- Si $h < 0$, se desplaza h unidades hacia la izquierda.

El vértice de la función g, considerando dicha traslación, debe ser $(h, 0)$.

### ii. Traslación vertical de la función $f(x) = ax^2$

¿Cómo es la parábola de la función $m(x) = x^2 + 4$ y de la función $p(x) = x^2 - 6$, en comparación con la parábola de la función $f(x) = x^2$? Veamos la figura:




Podemos notar que la única diferencia geométrica entre la gráfica de la función m y la función p, con respecto al gráfico de la función f es, que hubo una traslación en 4 unidades hacia arriba y 6 unidades hacia abajo respecto a la curva de la función f.

Por lo tanto, si la función está escrita de la forma $\mathbf{g(x) = ax^2 + k}$, la función $f(x) = ax^2$ sufre un desplazamiento vertical con la magnitud de acuerdo al valor de k.

- Si $k > 0$, se desplaza k unidades hacia arriba.
- Si $k < 0$, se desplaza k unidades hacia abajo.

El vértice de la función g, considerando dicha traslación, debe ser $(0, k)$.

## iii. Reflexión vertical

¿Cómo varía la parábola de la forma $f(x)=x^2$ si le anteponemos un signo "–"?

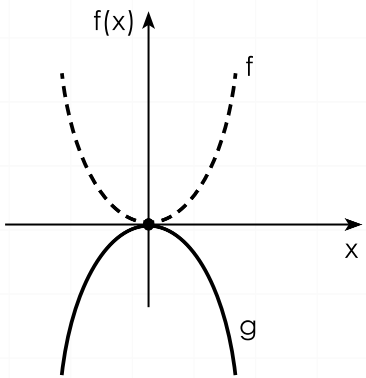
Ejemplo:

Grafiquemos la función $g(x)=-x^2$

Lo primero que podríamos analizar son algunas de las imágenes de una y otra, dados ciertos valores de x.

Veamos la siguiente tabla:

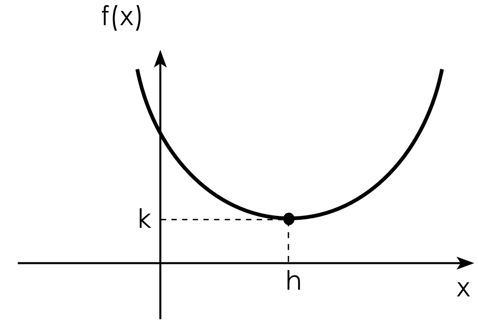
| x | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |
| g(x) | –9 | –4 | –1 | 0 | –1 | –4 | –9 |




Todo lo que era positivo, ahora será negativo, y así mismo, todo lo que era negativo se hace positivo, obteniendo una parábola imagen de una reflexión respecto al eje x de $f(x)=x^2$.

En síntesis: La función $\mathbf{f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k}$ corresponde a $g(x) = ax^2$ trasladada en h unidades en el eje x y en k unidades en el eje y. A su vez, $g(x) = ax^2$ es una contracción o dilatación de la función $h(x) = x^2$, dependiendo del valor de la constante "a".

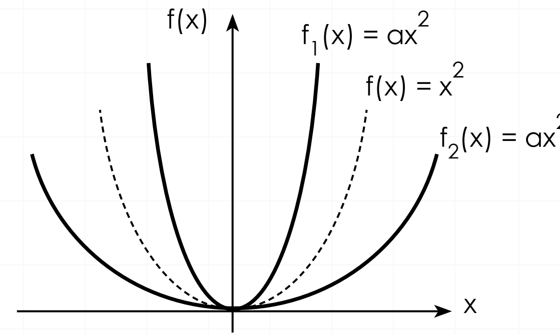
La función $f(x) = a(x-h)^2 + k$ (Forma Estándar o Canónica), le podremos extraer rápidamente las coordenadas del vértice V. Estas serán los valores de h y k, respectivamente.




V(h , k)

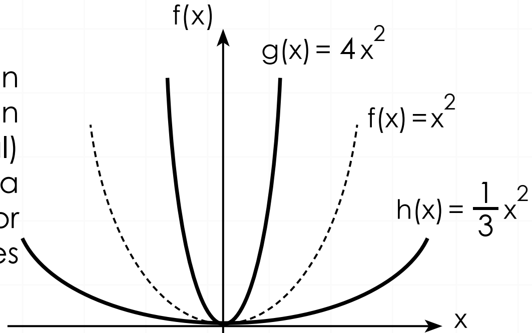
## g. Contracción o dilatación de la gráfica de una función cuadrática

- Si $|a| > 1$, la gráfica de $f_1(x) = ax^2$ es más cerrada en torno al eje de simetría que la gráfica de $f(x) = x^2$. Diremos que esta modificación corresponde a una contracción horizontal de la gráfica de f.
- Si $0 < |a| < 1$, la gráfica de $f_2(x) = ax^2$ es más abierta en torno al eje de simetría que la gráfica de $f(x) = x^2$. Diremos que esta modificación corresponde a una dilatación horizontal de la gráfica de f.



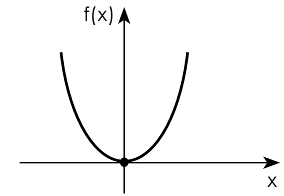
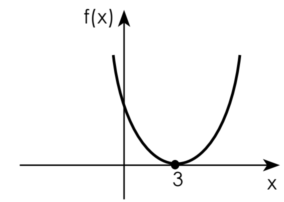
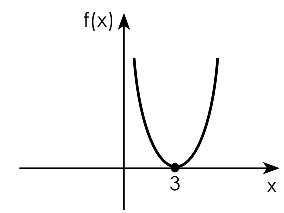
Ejemplo:

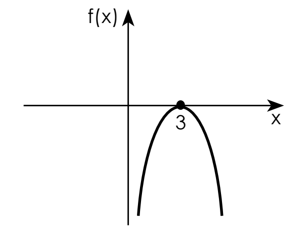
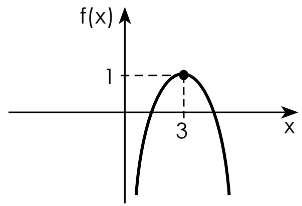
Si queremos analizar las gráficas las funciones que aparecen en el gráfico de la derecha, podemos notar que la función g es más cerrada que la función f (contracción horizontal) respecto a su eje de simetría, esto porque g se obtuvo a partir de la función f multiplicándola por 4, que es un valor mayor que 1, y esto implica que cuadruplica las imágenes que tenía f.




Por su parte, la función h está más abierta (dilatación horizontal) con respecto a su eje de simetría que la función f, pues se obtuvo multiplicando por $\frac{1}{3}$ las imágenes de dicha función y esto lo que hace es achicar las imágenes, lo que influye en que éstas estén a la tercera parte de su "altura" original.

Ejemplo: Si queremos graficar la función $f(x) = -2(x-3)^2 + 1$, el proceso se resume en el siguiente esquema:

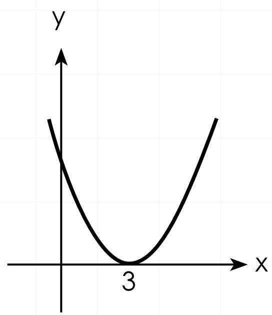
| Función | Transformación | Vértice | Gráfica |
|---|---|---|---|
| $f_0(x) = x^2$ | Función basal $f_0(x) = x^2$ | $V(0, 0)$ |  |
| $f_1(x) = (x-3)^2$ | Traslación de la gráfica de la función $f_0$ en 3 unidades hacia la derecha. | El vértice se mueve hasta ser $V(3, 0)$ |  |
| $f_2(x) = 2(x-3)^2$ | Contracción horizontal de la gráfica de la función $f_1$ . | El vértice no se mueve. Se queda en $V(3, 0)$ |  |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f_3(x) = -2(x-3)^2$ | Se produce una reflexión de la función anterior, con respecto al eje x. | El vértice no se mueve. Se queda en V(3,0) |  |
| $f_4(x) = -2(x-3)^2+1$ | Traslación de la gráfica de la función $f_3$ en 1 unidad hacia arriba. | El vértice se traslada a V(3,1) |  |

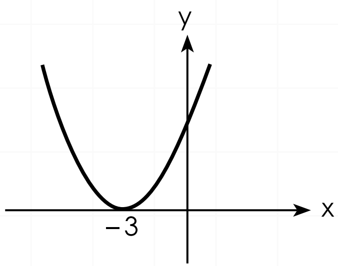
9. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función f definida por $f(x) = (x + 3)^2$, con dominio el conjunto de los números reales?

*HABILIDAD: REPRESENTAR. (DEMRE 2023)*

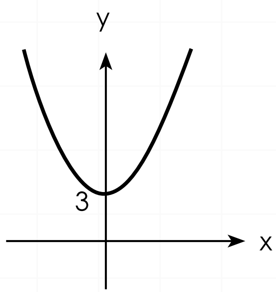
A )



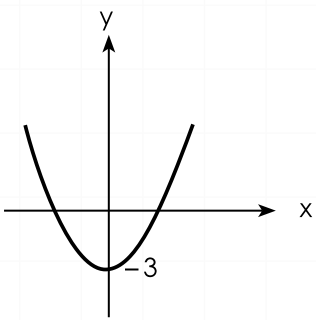

B )




C )




D )



10. Si el eje y es el eje de simetría de una parábola asociada a una función cuadrática con dominio el conjunto de los números reales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?

*HABILIDAD: ARGUMENTAR. (ADAPTACIÓN DEMRE 2019)*

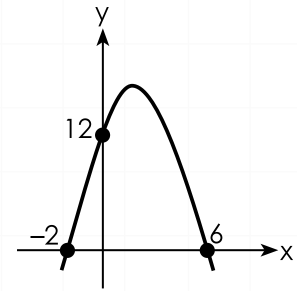
A) El vértice de la parábola pertenece al origen.

B) La recta que pasa por un punto de la parábola y por el vértice de ella tiene pendiente positiva.

C) Una recta paralela al eje de simetría de la parábola la intersecta en un solo punto.

D) El vértice está sobre el eje x.

11. La figura adjunta representa la parábola asociada a la función cuadrática f, cuyo dominio es el conjunto de los números reales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
*HABILIDAD: ARGUMENTAR. (ADAPTACIÓN DEMRE 2021)*




A) El eje de simetría de la parábola es la recta de ecuación $x = 3$.

B) Si $-2 < x < 6$, entonces $f(x) < 0$.

C) $f(7) = f(-3)$.

D) $f(12) = 0$.

12. La parábola que representa a la gráfica de una función cuadrática, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, intersecta al eje de las ordenadas en el punto A(0 , 2) y tiene su vértice en el punto B(2 , –2). ¿Cuál de las siguientes funciones, con dominio el conjunto de los números reales, está asociada a esta parábola?

*HABILIDAD: MODELAR. (ADAPTACIÓN DEMRE 2018)*

A) $g(x) = x^2 - 4x + 2$

B) $h(x) = x^2 + 4x + 2$

C) $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

D) $m(x) = x^2 + 4x + 3$

## h. Problemas de aplicación

En esta sección trabajaremos problema de aplicación asociados a ecuación cuadrática y a función cuadrática.

### i. Ecuación Cuadrática

Generalmente, los problemas de aplicación de ecuación cuadrática se centran en plantear una ecuación o plantearla y además encontrar su solución. Como en todo problema de aplicación, hay que tener en cuenta las restricciones para nuestra variable, dependiendo de lo que ésta representa. Por ejemplo si la variable representa medidas de lados de un polígono, solo debemos considerar valores positivos en el conjunto solución.

Ejemplo:

Un terreno rectangular de 96 $m^2$ de superficie, tiene 4 metros más de largo que de ancho. ¿Cuál es el perímetro del terreno?

Primero debemos expresar algebraicamente la medida del largo y del ancho: Si decimos que el ancho mide x, entonces el largo debe medir x + 4. Luego, como el área es igual a 96 $m^2$, y el área A de un rectángulo, se calcula A = largo · ancho, tenemos: $x \cdot (x + 4) = 96$, y a partir de esto, formamos una ecuación cuadrática que nos permitirá determinar el valor de x, y de paso calcular el perímetro que se nos pide.

$$x^2 + 4x = 96$$

$$x^2 + 4x - 96 = 0$$

$$(x - 8)(x + 12) = 0 \quad \text{/ factorizamos}$$

$$x_1 = 8 \quad y \quad x_2 = -12$$

Pero ¿me sirven ambas soluciones?

Notemos que debemos descartar $x_2$, ya que la medida del ancho no puede ser negativa. Por lo tanto, una vez descartada esta posibilidad, decimos que el ancho debe medir 8 m (x) y que el largo debe medir 12 m (x + 4). Finalmente tenemos que el perímetro del terreno es 8 m + 8 m + 12 m + 12 m = 40 metros.

## ii. Función Cuadrática

Existe una gran cantidad de situaciones que se pueden resolver utilizando la función cuadrática como una forma de modelar una determinada situación. Para lograrlo, hay que tener claro qué representa la variable independiente “x“ y qué representaría la variable dependiente “y = f(x)“, para luego de modelar la situación, poder reemplazar correctamente aquellos valores (o datos) que surjan de cada contexto.

Ejemplo:

Un proyectil es lanzado desde el nivel del suelo con una trayectoria parabólica que logra su máxima altura a los 4 segundos. Si se sabe que al segundo de comenzar a descender alcanzó una altura de 30 m, ¿cuál es la función que modela, en m, la altitud lograda por el proyectil, luego de t segundos?

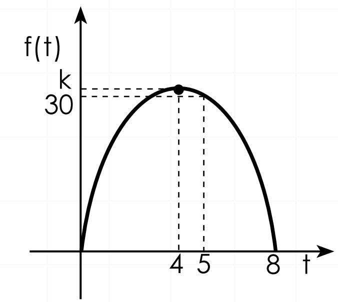
Podemos identificar del planteamiento, las variables tiempo en segundos (t) y altura en metros (que llamaremos f(t)). Además, para obtener la función, nos dan la siguiente información:

- La parábola pasa por el origen, ya que el proyectil es lanzado desde el nivel del suelo, es decir a los 0 segundos es lanzado desde una altura de 0 metros.

- El vértice de la parábola es (4 , k), ya que la altura máxima se alcanza a los 4 segundos. Además el eje de simetría es x = 4.

- La parábola pasa por el punto (5 , 30), ya que al segundo después de alcanzar el máximo, es decir a los 5 segundos, alcanza una altura de 30 metros.

Es importante tener en cuenta la forma de la parábola para ayudarnos determinar la función. Esta tiene concavidad negativa, ya que ser lanzado el proyectil, este aumenta en altura, llega al máximo luego comienza a perder altura hasta llegar al suelo, tal como es forma de una parábola. Debemos notar, que esta parábola toma valores positivos en ambas variables.




a a l y l a solo

Como las parábolas son simétricas respecto al eje de simetría, en este caso en x = 4, sabemos que si la parábola pasa por el origen (0 , 0), pasará también por el punto (8 , 0). En el contexto del problema quiere decir que, el proyectil comienza en el tiempo igual a 0 segundos, a una altura de 0 metros (nivel del suelo), luego gana altura hasta llegar a los k metros a los 4 segundos; y finalmente llega al suelo a los 8 segundos de ser lanzado.

Como los dos ceros de la función son $t_1 = 0$ y $t_2 = 8$, tenemos que la función es de la forma $f(t) = a \cdot t(t - 8)$, pues $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ será la función cuyos ceros son $x_1$ y $x_2$, y por lo tanto $f(t) = a\ (t - 0)(x - 8)$ es la función cuyos ceros son 0 y 8.

Ahora nos falta determinar al valor de "a". Para esto, reemplazamos en la función el punto $(5 , 30) \rightarrow f(t) = a \cdot t(t - 8) \rightarrow 30 = a \cdot 5 \cdot (5 - 8)$. Resolviendo la ecuación en a, obtenemos $a = -2$.

Tenemos entonces que la función que modela la trayectoria del proyectil en cuestión es $f(t) = -2x(x - 8)$ o bien $f(t) = -2x^2 + 16x$.

Si tenemos la expresión algebraica de la función, podemos determinar las coordenadas del vértice y analizar qué significa en el contexto del problema. Sabemos que la coordenada x (en este caso t) es 4: V(4 , k) y para obtener el valor de k, podemos usar fórmula o reemplazar el 4 en la abscisa de la función $\rightarrow f(4) = -2 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4$. Tenemos que f(4) = 32, por lo que el vértice es V(4 , 32). Esto significa que a los 4 segundos de haber sido lanzado el proyectil, alcanza su altura máxima y esta es igual a 32 metros.

13. Considere la función f con dominio el conjunto de los números reales definida por $f(x) = -20 + 15x + 5x^2$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera, con respecto a f?

*HABILIDAD: ARGUMENTAR. (ADAPTACIÓN DEMRE 2021)*

A) Su gráfico intersecta al eje x en los puntos $(-4, 0)$ y $(1, 0)$.

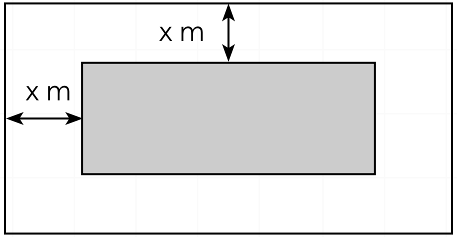
B) Su gráfico tiene como eje de simetría a la recta $x = \frac{3}{2}$.

C) Su valor máximo es $-\frac{25}{4}$.

D) Su gráfico es una parábola cuyas ramas apuntan hacia abajo.

14. Se tiene una piscina con forma rectangular de 4 m de ancho y 10 m de largo. Se desea colocar un borde de pasto de ancho x m como se representa en la figura adjunta. Si el área de la superficie total que ocupa la piscina y el borde de pasto, es de 112 $m^2$, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar el valor de x?

*HABILIDAD: REPRESENTAR. (ADAPTACIÓN DEMRE 2021)*




A) $x^2 + 40 = 112$

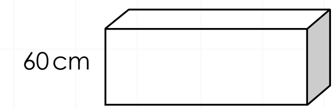
B) $x^2 + 14x = 72$

C) $2x^2 + 7x = 18$

D) $x^2 + 7x = 18$

15. En el paralelepípedo recto de la figura adjunta, el largo de la base es 10 cm mayor que el ancho de la misma y su altura es de 60 cm. Si x representa el largo de la base, en cm, ¿cuál de las siguientes funciones, con dominio el conjunto de los números reales mayores que 10, modela el volumen del paralelepípedo en términos de su largo, en $cm^3$?

*HABILIDAD: REPRESENTAR. (ADAPTACIÓN DEMRE 2021)*




A) $f(x) = 60x^2 - 600$

B) $g(x) = 60x^2 + 600$

C) $h(x) = 60x^2 - 600x$

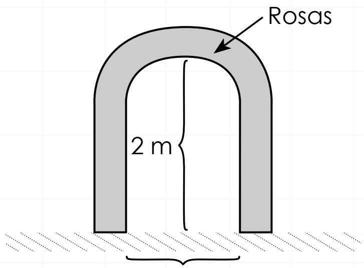
D) $j(x) = 60x^2 - 10x$

16. Las medidas de los lados de un rectángulo son números pares consecutivos. Si la superficie del rectángulo mide 48 $m^2$, ¿cuánto mide el lado de menor medida?
*HABILIDAD: MODELAR. (ADAPTACIÓN DEMRE 2022)*

A) 4 m
B) 6 m
C) 8 m
D) 12 m

17. Una florista necesita armar un arco de flores que estará ubicado verticalmente al suelo, para un matrimonio, el cual según las especificaciones de los novios, debe tener la forma de una parábola, como se representa en la figura adjunta. La función que modela la forma interior del arco de flores está dada por $f(x) = -x^2$. ¿Cuál es la distancia que debe haber entre las bases del arco para que la altura máxima del arco de flores sea de 2 m?

*HABILIDAD: REPRESENTAR. (DEMRE 2021)*




A) $\sqrt{2}$ m

B) $2\sqrt{2}$ m

C) 2 m

D) 4 m

18. La ganancia obtenida en miles de pesos por la venta de x unidades de cierto artículo se modela mediante la función $g(x) = -(x - 3{,}2)^2 + 5$. ¿Cuál debe ser la cantidad de artículos vendidos para conseguir la mayor ganancia posible?

    *HABILIDAD: MODELAR. (DEMRE 2022)*

A) 3

B) 5

C) 8

D) 9

19. En un computador se simula el lanzamiento de un proyectil desde el nivel del suelo con una trayectoria parabólica que logra su máxima altura a los 5 segundos. Si se sabe que al segundo de ser lanzado alcanzó una altura de 27 m, ¿cuál de las siguientes funciones modela, en m, la altitud lograda por el proyectil, luego de t segundos?

*HABILIDAD: MODELAR. (ADAPTACIÓN DEMRE 2022)*

A) $p(t) = 28t - t^2$

B) $f(t) = 27t^2$

C) $s(t) = 30t - 3t^2$

D) $q(t) = 5 + 27t - 5t^2$

20. En un computador se simula el lanzamiento de un objeto desde una altura de 8 cm. La altura, en cm, que alcanza dicho objeto se modela por la función f definida por $f(t) = -t^2 + 2t + 8$, tal que t representa el tiempo transcurrido desde el lanzamiento, en s. ¿A qué altura se encontraría el objeto a los 3 s de ser lanzado?

*HABILIDAD: REPRESENTAR. (DEMRE 2024)*

A) 5 cm

B) 8 cm

C) 13 cm

D) 23 cm

COLEGIO BAUTISTA TEMUCO

# EJERCICIOS M1

1. ¿Cuál de las siguientes funciones corresponde a una función cuadrática?

A) $f(x) = 3^2x + 1$

B) $h(x) = x^2 + 8$

C) $p(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$

D) $q(x) = \dfrac{1}{x^2}$

2. Considere la función $f(x) = -4x^2 + 10$, con x en los números reales. El mayor valor que alcanza la función es:

   A) $-15$

   B) $-2{,}5$

   C) $0$

   D) $10$

3. Las raíces (o soluciones) de la ecuación $x(x - 1) = 42$ son:

   A) $\sqrt{43}$ y $-\sqrt{43}$

   B) 7 y 6

   C) 7 y $-6$

   D) 2 y $-21$

4. El conjunto solución de la ecuación $-4x^2 = -64$ es:

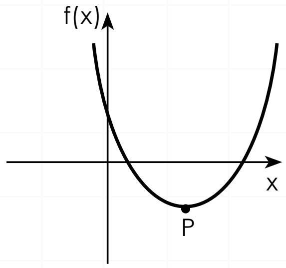
A) $\{16\}$

B) $\{-4\}$

C) $\{-4, 4\}$

D) $\{-2, 2\}$

5. La figura adjunta muestra la parábola correspondiente a la función $f(x) = x^2 - 8x + 15$. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice P?




A) $(1, -4)$
B) $(3, -5)$
C) $(4, -1)$
D) $(15, -4)$

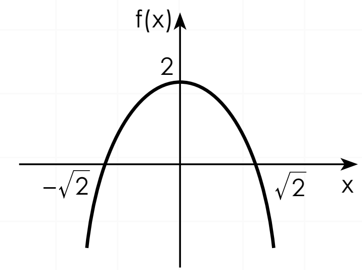
6. ¿Cuál es la función cuadrática cuya representación gráfica es la parábola de la figura adjunta?

A) $f(x) = -x^2 - 4$

B) $f(x) = x^2 + 2$

C) $f(x) = -x^2 - 2$

D) $f(x) = -x^2 + 2$



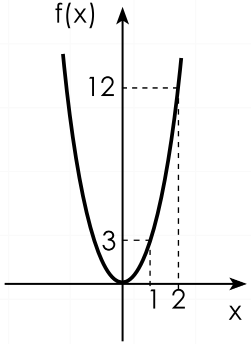
7. La gráfica de la función $f(x) = (-3x + 2) \cdot (1 - x)$ intersecta al eje y en:

A) 1
B) –2
C) –1
D) 2

8. Las raíces (o soluciones) de la ecuación $x(x + 13) = 30$ son:

A) 15 y –2
B) 10 y –3
C) 5 y –6
D) 2 y –15

9. Dado el gráfico de la figura adjunta. ¿Cuál es la ecuación que representa a la parábola?




A) $f(x) = x^2$

B) $f(x) = 3x$

C) $f(x) = -3x^2$

D) $f(x) = 3x^2$

10. Los puntos en que la parábola, cuya función es $f(x) = x^2 - 10x + 24$ intersecta al eje de las abscisas son:

A) $(6, 0)$ y $(4, 0)$

B) $(8, 0)$ y $(3, 0)$

C) $(12, 0)$ y $(2, 0)$

D) $(-6, 0)$ y $(-4, 0)$

11. Respecto a la función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x + c$, ¿cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

A) Si $c > 1$, no corta al eje x.

B) Si $c = 1$, corta al eje x en dos puntos.

C) Si $c \neq 1$, siempre corta al eje x.

D) Si $c > 0$, siempre corta al eje x.

12. ¿Cuál de los siguientes puntos pertenece al gráfico de la función $f(x) = -x^2 + 1$?

A) $(1, 1)$

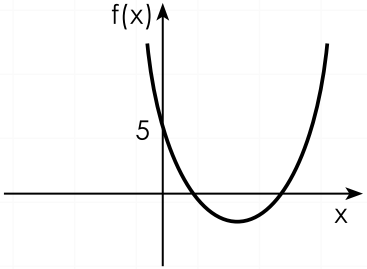
B) $(-1, 2)$

C) $(-1, 0)$

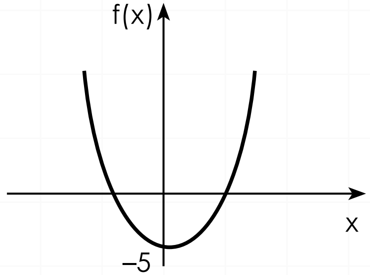
D) $(0, -1)$

13. Si $f(x) = x^2 - 5$, su gráfico es:

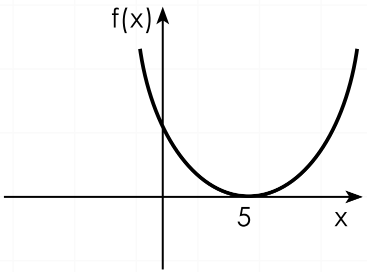
A)



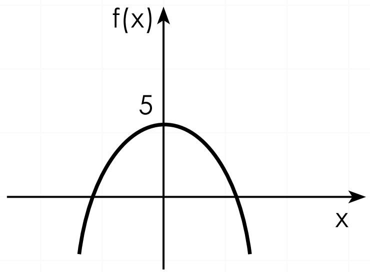

B)




C)




D)



14. La ecuación del eje de simetría de la parábola $f(x) = 3(x-5)^2 + 2$ es:

A) $x - 3 = 0$

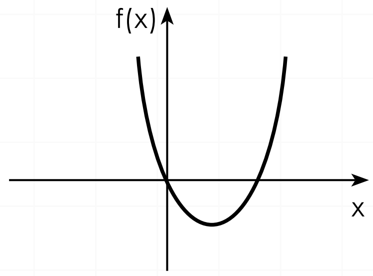
B) $x - 5 = 0$

C) $x - 2 = 0$

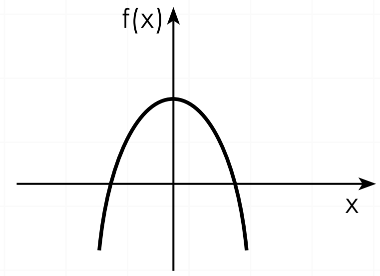
D) $x + 3 = 0$

15. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor al gráfico de la función $f(x) = x^2 - 4$?

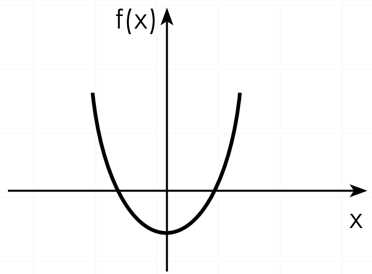
A)



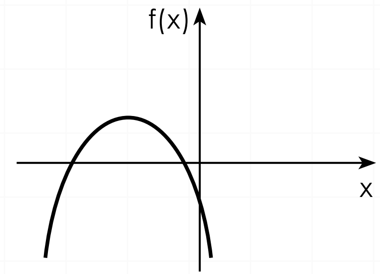

B)




C)




D)



16. Si el discriminante de una ecuación de segundo grado asociada a una función cuadrática es 0, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?

A) La parábola es tangente al eje y.

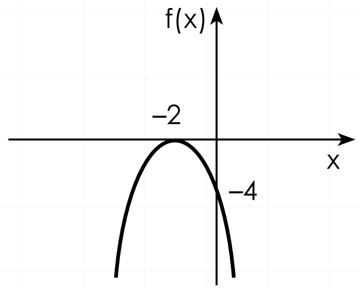
B) El vértice está ubicado en el eje y.

C) El vértice está ubicado en el eje x.

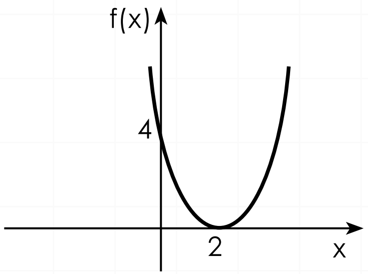
D) Las raíces (o soluciones) de la ecuación de segundo grado asociada a la función son reales y distintas.

17. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor la función $f(x) = -(x-2)^2$?

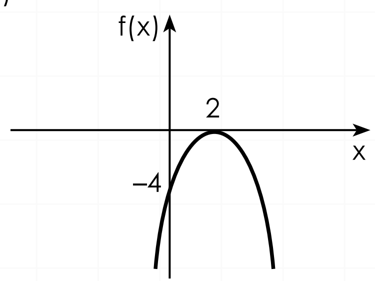
A)



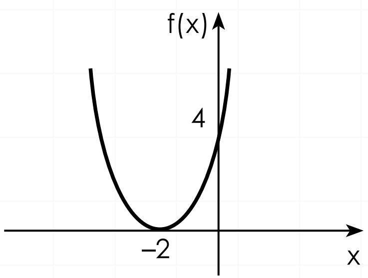

B)




C)




D)



18. El gráfico de la función $f(x) = x^2 - x - 6$, intersecta al eje y en el(los) punto(s) de coordenada(s):

A) $(0, 6)$
B) $(3, 0)$ y $(-2, 0)$
C) $(-6, 0)$
D) $(0, -6)$

19. El vértice de la parábola $f(x) = -(x + 1)^2 - 2$ es el punto de coordenadas:

A) $(-1, -2)$
B) $(1, -2)$
C) $(-1, 2)$
D) $(1, 2)$

20. Considere la función $f(x) = 2x^2 + 8x + 10$, con x en los números reales. El menor valor que alcanza la función es:

A) $-14$

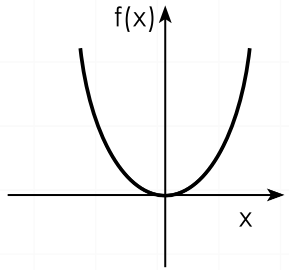
B) $-10$

C) $-2$

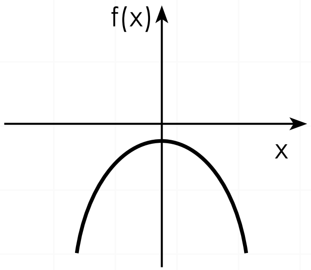
D) $2$

21. ¿Cuál de las siguientes gráficas podría corresponder a una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, si se sabe que $b^2 - 4ac > 0$?

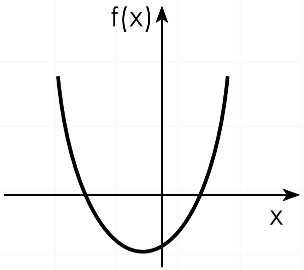
A)



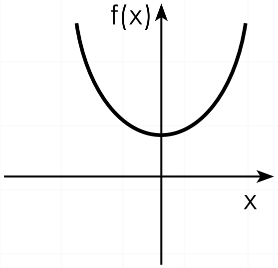

B)




C)

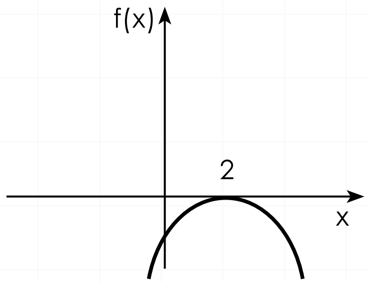



D)

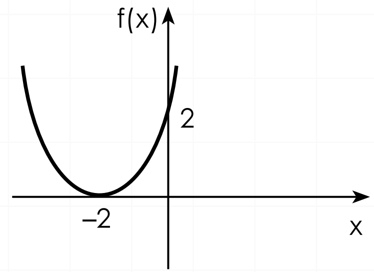


22. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor la función $f(x) = -(x + 2)^2$?

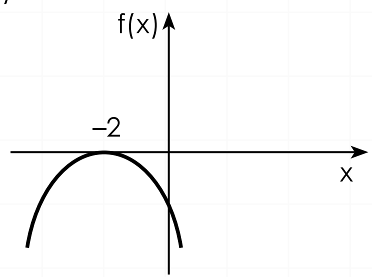
A )



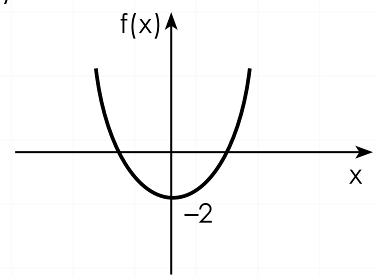

B )




C )




D )



23. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones relativas a la función $f(x) = 2x^2 + 12x + 16$ es verdadera?

A) Tiene un máximo valor en el punto $(-3, -2)$.

B) Su dominio es el conjunto de los números reales.

C) Su recorrido es el conjunto de los números reales menores o iguales que $-2$.

D) Su recorrido es el conjunto de los números reales menores que $-2$.

24. El conjunto solución de la ecuación $\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4x} + \frac{1}{8} = 0$ es:

A) $\{-2, -4\}$

B) $\left\{\frac{-1}{4}, \frac{-1}{2}\right\}$

C) $\{2, 4\}$

D) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$

25. ¿Cuánto suman las abscisas de los puntos de intersección entre la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x$ y la gráfica de la función lineal $g(x) = x + 3$?

A) 2

B) 3

C) 5

D) 8

26. ¿Cuál es una ecuación de segundo grado cuyas raíces (o soluciones) son 5 y –11?

A) $x^2 + 6x - 55 = 0$

B) $x^2 + 6x + 55 = 0$

C) $x^2 - 6x + 55 = 0$

D) $x^2 - 6x - 55 = 0$

27. Dada la parábola, cuya función es $f(x) = ax^2 + bx + c$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A ) Si $c = 0$, entonces su eje de simetría es $x = 0$.

B ) Si $b = 0$, entonces su vértice está ubicado en el punto $(0, c)$.

C ) Si $c > 0$, las ramas de la parábola abren hacia arriba.

D ) Si $a = 0$, la parábola intersecta al eje x en el punto $(b, 0)$.

28. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es correcta respecto a la parábola $f(x) = -x^2 - 4x - 1$?

A) Corta al eje de las abscisas en dos puntos.

B) No corta al eje de las abscisas.

C) Intersecta al eje de las ordenadas en el punto $(-1, 0)$.

D) El punto $(0, 2)$ pertenece a ella.

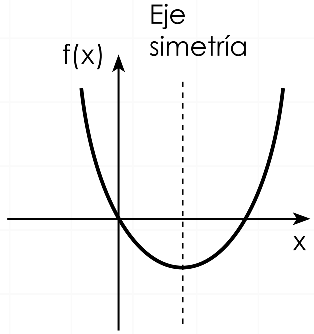
29. El gráfico de la figura adjunta podría corresponder a la función cuadrática:

A) $f(x) = 3 + 2x - x^2$

B) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

C) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

D) $f(x) = x^2 - 2x$

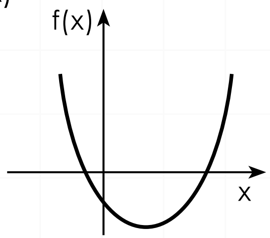


30. Respecto a la parábola $f(x) = x^2 - 9x + 14$, ¿cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

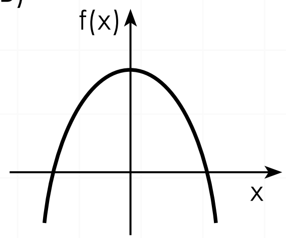
A ) Sus ceros son $x_1 = 7$ y $x_2 = -2$.
B ) Intersecta al eje y en $(0, 14)$.
C ) Su eje de simetría es $x = 4$.
D ) Intersecta al eje x en un punto.

31. ¿Cuál de las siguientes gráficas podrían corresponder a $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a > 0$, y $c > 0$?

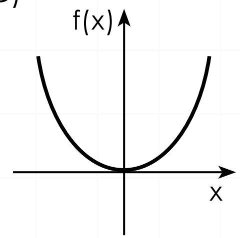
A)



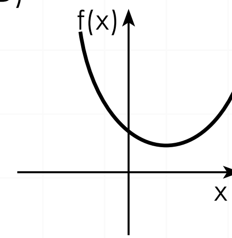

B)




C)




D)



32. Considere la parábola $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)^2$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) La parábola se abre hacia abajo.

B) Su vértice se encuentra en $(0, -2)$.

C) Su eje de simetría es $x = -2$.

D) La parábola pasa por el punto $(1, 9)$.

33. Dada la parábola de ecuación $f(x) = x^2 - 4x + m$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Si $m > 4$, la parábola intersecta en dos puntos al eje x.

B) Si $m = 4$, la parábola intersecta en un solo punto al eje x.

C) Si $m = 4$, la parábola intersecta en dos puntos al eje x.

D) Si $m < 4$, la parábola no intersecta al eje x.

34. Sea la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Si $a > 0$, entonces la función tiene un mínimo.

B) Si $a > 0$, la función es creciente.

C) Si $c = 0$, la gráfica de la función no pasa por el origen.

D) Si $b = 0$, $a < 0$ y $c > 0$, entonces la gráfica de la función no intersecta al eje x.

35. Dada la parábola cuya función es $f(x) = x^2 - 3x - 54$, ¿cuáles son los puntos de intersección de la parábola con el eje x?

A) $(6, 0)$ , $(-9, 0)$

B) $(0, -9)$ , $(0, 6)$

C) $(-6, 0)$ , $(9, 0)$

D) $(-9, 0)$ , $(6, 0)$

36. ¿Qué valor debe tener k en la función $f(x) = kx^2 + 3kx + 8$ para que uno de los ceros de la función sea –2?

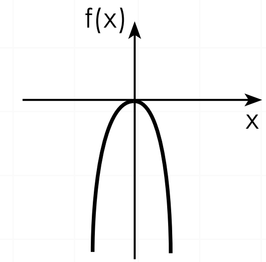
A) –2

B) –0,25

C) 0,25

D) 4

37. Si en la figura adjunta se tiene el gráfico de una función del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, ¿cuál de las siguientes proposiciones es siempre verdadera?




A) $a > 0$

B) $b < 0$

C) $b^2 = 4ac$

D) $a^c < c^a$

38. Si se conoce el valor de las raíces de una función cuadrática (sin conocer ningún otro parámetro), ¿cuál de los siguientes elementos de la función es posible de calcular?

    A) El vértice.

    B) La ecuación de la recta del eje de simetría.

    C) El discriminante.

    D) La expresión algebraica de la función.

39. El vértice de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x + c$ está ubicado en el punto $(m, n)$, con c, m y n números reales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?

A) El valor de m depende del valor de c.

B) El valor de n depende del valor de c.

C) $(m, n)$ es el punto máximo de la gráfica de la función.

D) El punto $(m, n)$ se posiciona sobre el eje x.

40. El recorrido de la función $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$ es:

A) $]-\infty\ ,\ -1]$

B) $]-\infty\ ,\ 1]$

C) $]-\infty\ ,\ 7]$

D) $[7\ ,\ +\infty[$

41. Si la gráfica de una función cuadrática f(x) pasa por el punto (2 , –9) y tiene su vértice en el punto (–1 , 9), entonces f(x) es igual a:

A) $f(x) = -9 \cdot (x^2 + 2x + 2)$

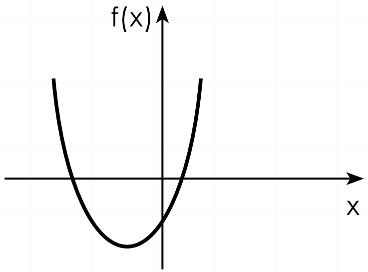
B) $f(x) = -9 \cdot (x^2 - 2x - 2)$

C) $f(x) = -3 \cdot (x^2 + x - 3)$

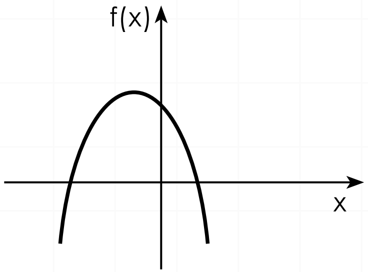
D) $f(x) = -2x^2 - 4x + 7$

42. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función $f(x) = (5 + x)(1 - x)$?

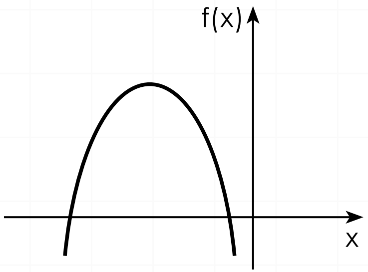
A)



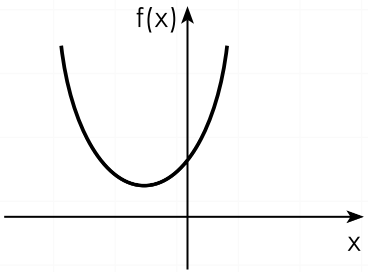

B)




C)




D)



43. Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Las raíces de $f(x)$ corresponden a números reales inversos aditivos (distintos de 0). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?

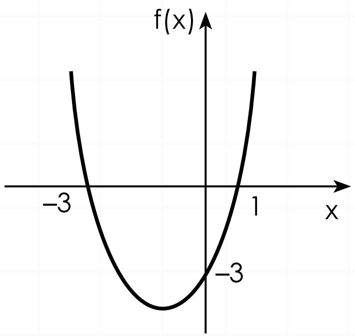
A) El discriminante es cero.

B) $b = 0$

C) $c > 0$

D) a y c tienen el mismo signo.

44. La función graficada corresponde a:




A) $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

B) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

C) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

D) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

45. Si se define la función f, dada por $f(x) = -2(x + 1)^2 + 3$, con dominio en los $\mathbb{R}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $f(x) > 0$ para todo x de su dominio.

B) Es una función cuya gráfica tiene al eje y como eje de simetría.

C) El recorrido de f es el conjunto $\mathbb{R}^+$.

D) La función es creciente para $x < -1$.

46. ¿Cuál de las siguientes funciones no intersecta al eje x?

A) $f(x) = x^2 - 9x + 18$

B) $f(x) = 2x^2 + 8x + 7$

C) $f(x) = 20 + 5x - x^2$

D) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

47. ¿Para qué número natural se cumple que “el producto del número por su antecesor es igual al cuádruple de su sucesor, aumentado en 2”?

A) 3

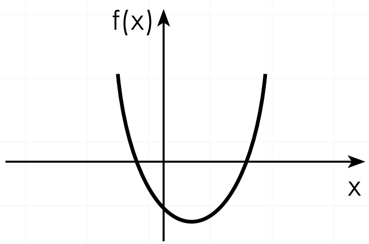
B) 4

C) 5

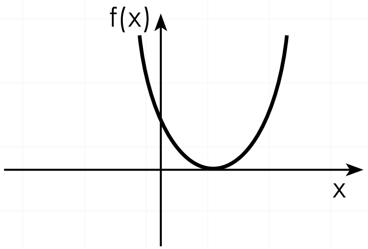
D) 6

48. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor al gráfico de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, si sabemos que $a < 0$ y $c < 0$?

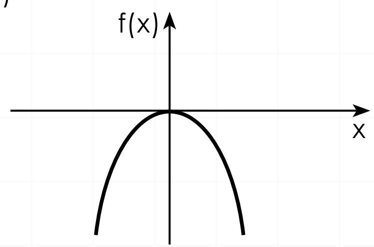
A)



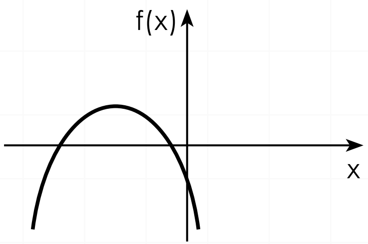

B)



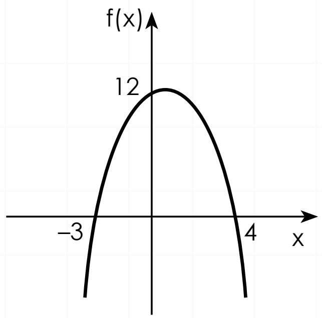

C)




D)



49. La función graficada corresponde a:




A) $f(x) = x^2 + x - 12$

B) $f(x) = x^2 - x - 12$

C) $f(x) = -x^2 + x + 12$

D) $f(x) = -x^2 - x + 12$

50. Dada la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx$, con a y b reales positivos. Podemos afirmar que:

A) El recorrido de f es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

B) La función f tiene un máximo valor si $a - b > 0$.

C) El gráfico de f tiene simetría respecto al eje $x = \frac{a+b}{2}$.

D) Si $a > 0$, entonces $f(x) < 0$ para todo $x \in \left]-\frac{b}{a}, 0\right[$.

51. Considere la función $f(x) = 3x^2 + 18x + 14$, con x en los números reales. El menor valor que alcanza la función es:

A) 67

B) 3

C) –3

D) –13

52. El discriminante de una función cuadrática de la forma, $f(x) = x^2 + bx + c$ es 36. ¿Cuál de los siguientes pares de valores podrían corresponder a las raíces de dicha función?

A) 1 y 7

B) 2 y 3

C) 2 y 4

D) 2 y 12

53. La gráfica de una función cuadrática f(x) tiene su vértice en el punto $(-3, -2)$. ¿Para qué valor de a, distinto de 1, se cumple que $f(a) = f(1)$?

A) $-7$

B) $-5$

C) $-2$

D) Faltan datos para determinarlo.

54. ¿Cuál de las siguientes funciones tiene como representación geométrica a una gráfica que se obtiene como resultado al trasladar verticalmente en 2 unidades hacia abajo la función $h(x) = -2(x + 1)^2 + 3$ y luego esta gráfica resultante reflejarla con respecto al eje x, de la función?

A) $h(x) = 2(x + 1)^2 + 7$

B) $h(x) = -2(-x + 1)^2 + 3$

C) $h(x) = 2(x + 1)^2 - 1$

D) $h(x) = -2(x - 1)^2 - x$

55. Sean a y b valores reales distintos de cero. Considere a partir de estos valores, la siguiente función con variable real x:

$$g(x) = a(x-2)^2 + b$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es siempre correcta, respecto a la función g?

A) Si $a > 0$, entonces $g(x) > 0$ para todo valor de x que pertenezca al dominio de g.
B) La función g es una función simétrica con respecto a un eje $x = 2$.
C) Su vértice es el punto $(2, -b)$.
D) Su vértice es el punto $(-2, b)$.

56. Una persona se dedica a la venta de cierto artículo y la ganancia obtenida en miles de pesos por la venta de x unidades, se modela mediante la función $f(x) = -(x - 7)^2 + 3$. ¿Cuál es la cantidad de artículos que le permite conseguir la mayor ganancia posible?

A) 3

B) 5

C) 7

D) 8

57. En un cierto auto, para velocidades hasta 300 km/h, el consumo de combustible está dado por la función $C(v) = \dfrac{400v - v^2}{250}$, donde C es el consumo de combustible en $cm^3$ y v es la velocidad en km/h. ¿Para qué velocidad el consumo de combustible es máximo?

A) 120 km/h
B) 160 km/h
C) 200 km/h
D) 300 km/h

58. Si el costo de mantención de una empresa se determina con la función $f(x) = -x^2 + 2x + 8$, donde x es el número de artículos diarios producidos. ¿Cuál será el número de artículos diarios que se deben producir para obtener el máximo costo de mantención?

A) $-1$

B) 1

C) 2

D) 9

59. La efectividad de un comercial en televisión depende de cuántas veces lo ve un espectador. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad determinó que si la efectividad E se mide en una escala del 0 al 10, entonces:

$$E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2$$

Donde n es el número de veces que un espectador ve un cierto comercial. Para que éste tenga una efectividad máxima, ¿cuántas veces deberá verlo un espectador?

A) 60
B) 50
C) 40
D) 30

60. Un cohete es lanzado hacia el cielo, donde su altura $h(t)$ respecto al tiempo $t$ (medido en segundos) está dada por la función $h(t) = -12t^2 + kt + 5$. Si la altura máxima del cohete se alcanza a los 3 segundos, ¿cuál es el valor de $k$?

A) 144

B) 72

C) 36

D) 18

61. Al hacer un estudio de mercado de Smartwatch, una compañía obtuvo las siguientes funciones de oferta y demanda de dicho producto en función de su precio:

$$\text{Demanda: } f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 7.000.000 \qquad \text{Oferta: } f(x) = \frac{2}{25}x^2$$

Siendo x el precio de un Smartwatch, en UM (unidades monetarias), y f(x) la cantidad de Smartwatch que se demandan o se ofrecen en un año, ¿a qué precio, en unidades monetarias (UM) se deberían vender los Smartwatch para que la demanda iguale a la oferta?

A) 6.500
B) 6.000
C) 5.500
D) 5.000

62. Si la gráfica de la función cuadrática g se obtiene trasladando la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en 2 unidades hacia la derecha, luego triplicando las imágenes de esta nueva función y, finalmente, trasladando esta figura resultante 5 unidades hacia abajo, ¿Cuál es la expresión algebraica que mejor representa estas condiciones para la función g?

A) $g(x) = 2(x + 3)^2 + 5$

B) $g(x) = 3(x - 2)^2 - 5$

C) $g(x) = 5(x - 3)^2 + 2$

D) $g(x) = 2(x + 5)^{-5} - 3$

63. El producto entre las edades que tenía Pedro hace 5 años con la edad que tendrá en 5 años más equivale al cuádruple de la edad que tendrá en 35 años más, ¿qué edad tiene?

A ) 13 años.

B ) 15 años.

C ) 20 años.

D ) 33 años.

64. Una caja de cartón tiene una base rectangular tal que su largo es 3 unidades mayor que su ancho. Si el alto de la caja mide 1 unidad más que el ancho, ¿cuál es la función que modela, en función de su largo, la superficie total S de la caja, sabiendo que dicho largo mide x cm y se consideran en este cálculo sus 4 caras laterales y sus dos tapas, inferior y superior? (Ayuda: Recuerda que el área de un rectángulo se calcula "Largo x Ancho").

A) $S(x) = 6x^2 + 8x - 2$

B) $S(x) = 2x^2 + 6x + 4$

C) $S(x) = 6x^2 - 20x + 12$

D) $S(x) = 3x^2 - x + 15$

65. A Matías en una prueba le piden resolver la siguiente ecuación: $3x^2 + 3x - 6 = x + 2$, y su desarrollo fue el siguiente:

Paso 1: Factorizó el lado izquierdo por 3

$$3(x^2 + x - 2) = x + 2$$

Paso 2: Factorizó el trinomio en factores lineales

$$3(x + 2)(x - 1) = x + 2$$

Paso 3: Dividió a ambos lados por (x + 2) y simplificó

$$\frac{3(x+2)(x-1)}{x+2} = \frac{x+2}{x+2}$$

$$3(x - 1) = 1$$

Paso 4: Desarrolló el paréntesis

$$3x - 3 = 1$$

Paso 5: Despejó la variable

$$x = \frac{4}{3}$$

Terminada su resolución, la profesora le dijo a Matías que tendría la mitad de la nota, porque con su resolución perdió la mitad de las soluciones en uno de los pasos. ¿En qué paso perdió la otra solución?

A) Paso 1.
B) Paso 2.
C) Paso 3.
D) Paso 4.

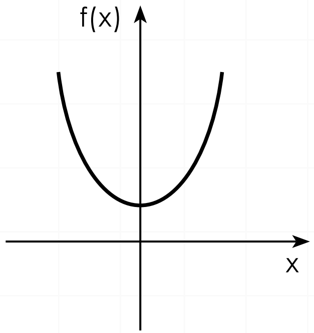
COLEGIO BAUTISTA TEMUCO

# EJERCICIOS M2

1. El gráfico de $f(x) = ax^2 + c$ queda representado por la figura adjunta si:

   (1) $a > 0$ y $-a > -c$

   (2) $c > 0$




A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) o (2)
E) Se requiere información adicional

2. Dada la parábola $f(x) = x^2 + bx + c$. Se pueden determinar las coordenadas del vértice si se sabe que:

(1) Intersecta al eje x en $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$

(2) $b = -5$ y $c = 1 - b$

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) o (2)

E) Se requiere información adicional

3. La gráfica de $f(x) = ax^2 - 2x + c$, es tangente el eje x si:

(1) $a \cdot c = 1$

(2) $a = 2$ y $c > 0$

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) o (2)

E) Se requiere información adicional

4. ¿A cuál de las siguientes funciones se le asocia una parábola de vértice $(p\ ,-q)$?

A) $f(x) = p(x-1)^2 - q$

B) $g(x) = -(x-p)^2 - q$

C) $h(x) = p(x+1)^2 - q$

D) $j(x) = (x-p)^2 + q$

E) $k(x) = -(x+p)^2 + q$

5. La parábola asociada a una función cuadrática se intersecta con el eje y en un punto de ordenada positiva, y tiene concavidad hacia abajo. ¿Qué se puede decir de las abscisas de los puntos de intersección con el eje x?

A ) Ambas son positivas.

B ) Ambas son negativas.

C ) Una es positiva y la otra negativa.

D ) Depende del valor absoluto de la ordenada de la intersección con el eje y.

E ) No se puede determinar.

6. Sea $k > 0$. ¿Cuál de las siguientes alternativas representa mejor la traslación geométrica de la gráfica de la parábola correspondiente a $f(x) = x^2 + bx + c$, para llegar a la posición de la parábola correspondiente a $f(x + k)$?

A ) Hacia la derecha y hacia arriba, respecto de la de $f(x)$.

B ) Hacia la izquierda y hacia arriba, respecto de la de $f(x)$.

C ) Hacia la izquierda respecto de la de $f(x)$.

D ) Hacia la derecha respecto de la de $f(x)$.

E ) Hacia arriba respecto de la de $f(x)$.

7. Sean a y c números reales positivos. ¿En cuál de las siguientes funciones el recorrido puede ser igual a $[4, +\infty[$?

A) $f(x) = -ax^2$

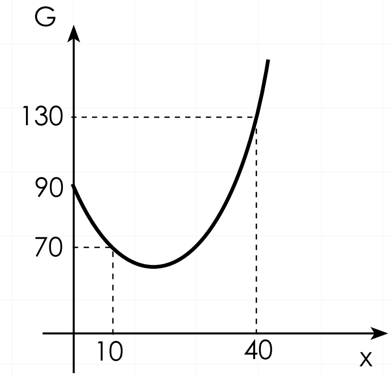
B) $f(x) = -ax^2 + c$

C) $f(x) = ax^2 - c$

D) $f(x) = ax^2 + bx - c$

E) $f(x) = ax^2 + bx + a^2c$

8. En la producción de x unidades mensuales de cierto producto, una fábrica tiene un gasto, en millones de pesos, descrito por la función de segundo grado, representada en la figura adjunta. Entonces, el gasto mínimo, en millones de pesos, es:




A) 64,5
B) 66
C) 67,5
D) 69

9. La altura de una pelota en vuelo está dada por $h(t) = At - Bt^2$, con $t > 0$. Podemos determinar la altura máxima que alcanza la pelota si se conoce que:

   (1) El gráfico de $h(t)$ es simétrico respecto de la recta cuya ecuación es $t = 5$.

   (2) $h(1) = 18$.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) o (2)
E) Se requiere información adicional

10. Considera el siguiente gráfico de la figura adjunta, donde la curva de f es simétrica con la curva de h, y la curva de g es simétrica con la curva de k, ambos casos respecto al eje x. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?

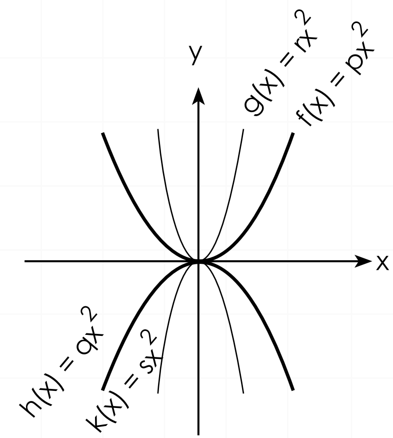
A) $r > p > q > s$

B) $|r| > |s| > |p| > |q|$

C) $|p| > |s|$

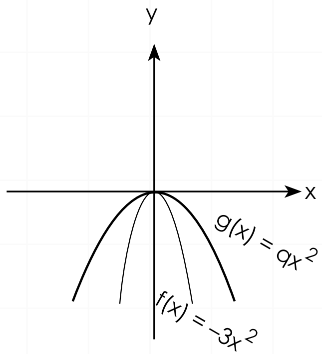
D) $|p| = |s|$

E) $|s| < q$

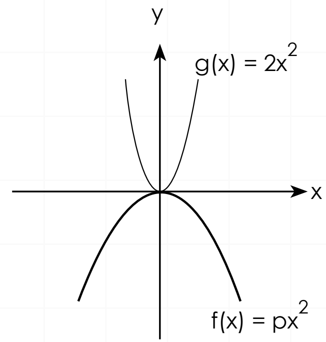


11. En los siguientes gráficos se representan las funciones $f(x) = px^2$ y $g(x) = qx^2$. ¿En cuál de ellos puede darse que $pq = 1$?

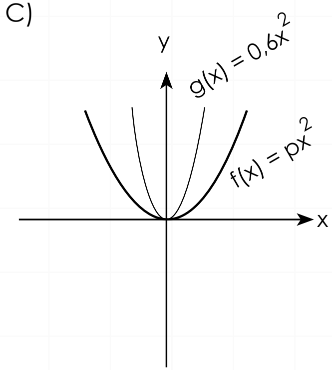
A)



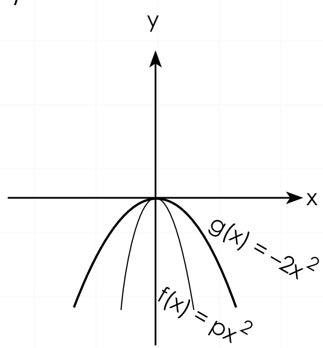

B)



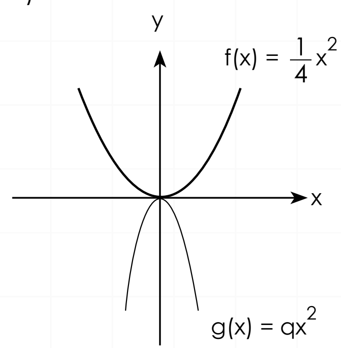

C)




D)




E)



12. La parábola asociada a la función $f(x) = -3x^2 + px - 2p$ no se intersecta con el eje x. ¿Qué condición debe cumplir p?

A) $p > 0$

B) $p < 0$

C) $p \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]24, +\infty[$

D) $p < 24$

E) $p \in \,]0, 24[$

13. ¿En cuál de las siguientes funciones definidas en los reales se cumple que $f(3 + m) = f(3 - m)$, para todo número real m?

A) $f(x) = -x^2 + 1$

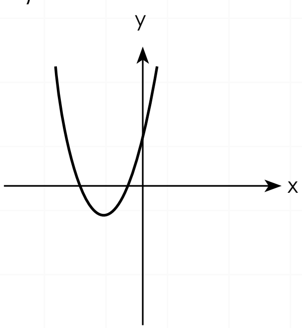
B) $f(x) = x^2 - 3$

C) $f(x) = (x - 3)^2 + 5$

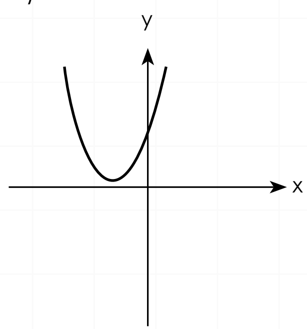
D) $f(x) = -(x + 3)^2 - 9$

14. Sean p y q dos números reales, de modo que $p > 0$ y $\frac{p}{q} = -5$. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor la gráfica de $f(x) = px^2 + 9x + 4q$?

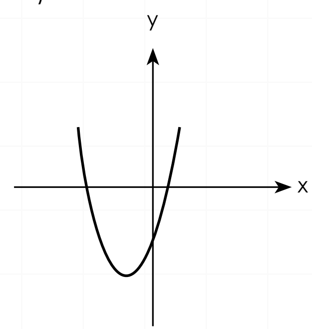
A)



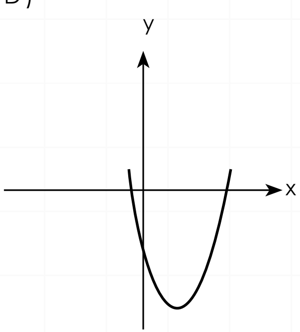

B)



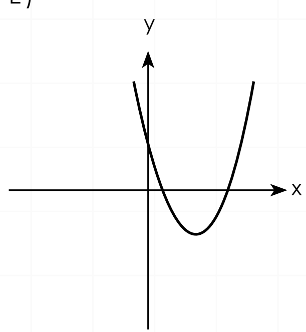

C)




D)




E)



15. A la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c > 0$ se le aplica una reflexión respecto al origen de coordenadas. ¿Qué función resulta?

A) $g(x) = -ax^2 + bx - c$

B) $g(x) = ax^2 - bx + c$

C) $g(x) = -ax^2 - bx - c$

D) $g(x) = ax^2 - bx - c$

E) $g(x) = -ax^2 + bx + c$

16. ¿Cuál de las siguientes relaciones se puede modelar mediante una función cuadrática?

A) El volumen de un cilindro de medida de altura dada, en función de la medida de su radio.

B) El área lateral de un cono de medida de radio dado, en función de la medida de su generatriz.

C) La medida del lado de un cuadrado, en función de su área.

D) La medida de la base de un triángulo de área dada, en función de la medida su altura.

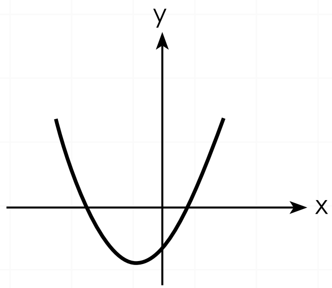
E) La medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, en función de la medida de su cateto.

17. Se sabe que la parábola asociada a la función $h(x) = x^2 + kx + 8$ se intersecta con el eje x en los puntos P(p , 0) y Q(q , 0), de modo que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{7}{4}$. ¿Cuál es el valor de k?

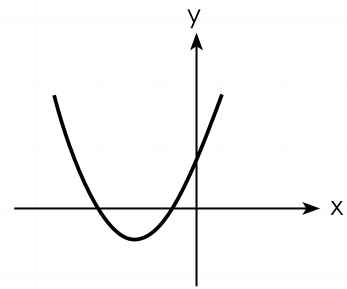
A) 7
B) –7
C) 14
D) –14
E) –3,5

18. Considere la función f cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = ax^2 - 6x + 3c$, con $a > 0$ y $ac = -10$. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la gráfica de f?

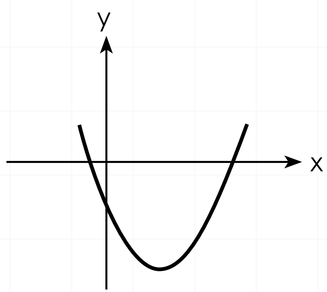
A )



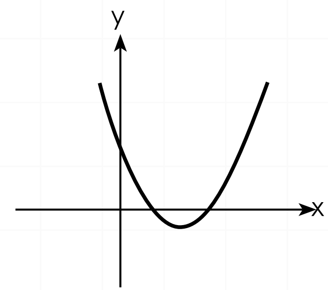

B )




C )




D )



19. La expresión $M - \frac{N}{R}t^2$ representa el volumen de agua, en $m^3$, que queda en una piscina en el instante t, en segundos, desde que la piscina está en su máxima capacidad. Si M, N y R son constantes positivas, ¿cuál de las siguientes expresiones representa la cantidad de segundos que la piscina tarda en quedarse sin agua?

A) $\frac{MR}{N}$

B) $\sqrt{\frac{MR}{N}}$

C) $-\sqrt{\frac{MR}{N}}$

D) $\frac{MN}{R}$

20. ¿Para qué valor de m, la gráfica de la función $f(x) = -2(x - 7)^2 - m + 3$, definida en los reales, es tangente al eje x?

A) 0

B) –3

C) 3

D) 7

# CAPÍTULO 13

## RESPUESTAS

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. C | 1. B | 21. C | 41. D | 61. D | 1. A |
| 2. C | 2. D | 22. C | 42. B | 62. B | 2. D |
| 3. C | 3. C | 23. B | 43. B | 63. B | 3. A |
| 4. C | 4. C | 24. C | **44. C** | 64. C | 4. B |
| 5. B | 5. C | 25. A | 45. D | **65. C** | 5. C |
| 6. B | 6. D | 26. A | 46. D | | 6. C |
| 7. D | 7. D | **27. B** | 47. D | | 7. E |
| 8. B | **8. D** | 28. A | 48. D | | 8. C |
| 9. B | 9. D | 29. D | 49. C | | 9. C |
| 10. C | 10. A | 30. B | 50. D | | 10. A |
| 11. C | 11. A | 31. D | 51. D | | 11. A |
| 12. A | 12. C | 32. C | 52. A | | 12. E |
| 13. A | 13. B | 33. B | 53. A | | 13. C |
| 14. D | 14. B | 34. A | 54. C | | 14. C |
| 15. C | 15. C | 35. C | 55. B | | 15. A |
| 16. B | 16. C | 36. D | 56. C | | 16. A |
| 17. B | 17. C | 37. C | 57. C | | 17. D |
| 18. A | 18. D | 38. B | **58. B** | | 18. C |
| 19. C | 19. A | 39. B | 59. D | | 19. B |
| 20. A | 20. D | 40. C | 60. B | | 20. C |